Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 736238 05 settembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	a
3	c
4	c
5	b
6	a
7	b
8	a
9	a
10	a

1. Il polinomio di Taylor al primo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x}\right)$ è:

► (a) $\frac{x}{2}$ (b) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ (c) $1+\sqrt{1+x}$ (d) $1+\frac{x}{2}$

Soluzione:

$f(x) = \log(\sqrt{1+x})$

utilizziamo prima lo sviluppo di Taylor del binomiale

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \qquad x \to 0.$$

e quello del logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad \text{con } t = \frac{x}{2} + o(x)$$

osservando che se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$.

$$\log(\sqrt{1+x}) = \log\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x) + o\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x)$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor risulta che il polinomio al primo ordine è $P(x) = \frac{x}{2}$.

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{2\cos x + \sin(x^2) - 2}{x^5}$

► (a) è limitata inferiormente ma non superiormente

(b) è limitata

(c) è limitata superiormente ma non inferiormente

(d) non è limitata né superiormente né inferiormente

Soluzione:

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2\cos x + \sin(x^2) - 2}{x^5}$$

per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) + (x^2 + o(x^4)) - 2}{x^5} =$$

$$= \frac{\cancel{2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{12} + \cancel{o(x^5)} + \cancel{x^2} + o(x^4) \cancel{-2}}{x^5} = \frac{\frac{1}{12} + o(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow f$ non è limitata superiormente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\text{limitata}}{+\infty} = 0 \Rightarrow f \text{ è limitata in un intorno di } +\infty$$

quindi f è limitata inferiormente su $(0, +\infty)$.

3. $\displaystyle\int_5^6 \frac{dx}{x^2 - 8x + 7} =$

(a) $\log \dfrac{5}{2}$

(b) $\arctan 6 - \arctan 5$

► (c) $\dfrac{\log 2 - \log 5}{6}$

(d) $\dfrac{13}{40}$

Soluzione:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \iff x = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 7 = (x-7)(x-1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+7} = \frac{1}{7-1} \log \left| \frac{x-7}{x-1} \right| + c$$

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7} = \left[\frac{1}{6} \log \left| \frac{x-7}{x-1} \right| \right]_5^6 = \frac{1}{6} \log \left| \frac{-1}{5} \right| - \frac{1}{6} \log \left| \frac{-2}{4} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\log \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \log \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \left(-\log 5 + \log 2 \right).$$

4. Sia $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{t^2}\, dt$. Allora $F'(2) =$

(a) 0 (b) $\frac{\log 5}{4}$ ► (c) $\frac{\log 17}{4}$ (d) $\frac{\log 17}{16}$

Soluzione:

Usiamo la formula di derivazione

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x)).$$

$$F'(x) = 2x \frac{\log(1+(x^2)^2)}{(x^2)^2} - 0 = \frac{2x \log(1+x^4)}{x^4} = \frac{2 \log(1+x^4)}{x^3}$$

$$F'(2) = \frac{2 \log(1+16)}{8} = \frac{\log 17}{4}$$

5. Sia $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Allora

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

► (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ non converge assolutamente

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ converge assolutamente

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ converge

Soluzione:

Ricordiamo che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. Quindi

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \left|-\frac{1}{x}\right| dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

quindi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge assolutamente.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$

► (a) converge (b) diverge positivamente (c) non esiste (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x)=\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x^{5/4}}$. Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Per $x\in(0,1]$, $f(x)>0$ e, per $x\to0^+$ risulta

$$f(x)=\frac{x^{1/2}+o(x)}{x^{5/4}}=\frac{x^{1/2}(1+o(x^{1/2}))}{x^{5/4}}=\frac{1+o(x^{1/2})}{x^{3/4}}$$

Scegliamo quindi $g(x)=\dfrac{1}{x^{3/4}}$ e applichiamo il criterio del confronto asintotico. Dato che $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ e che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, abbiamo che anche $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Per $x\in[1,+\infty)$ $f(x)$ ha segno variabile. Osserviamo che $|f(x)|=\dfrac{|\sin(\sqrt{x})|}{x^{5/4}}\leq\dfrac{1}{x^{5/4}}$. Dato che $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/4}}$ converge, per il criterio del confronto, $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,dx$ converge e, per il criterio di assoluta convergenza $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}}=$

(a) $+\infty$ ► (b) 0 (c) $\dfrac{1}{e}$ (d) 1

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}} = \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\log n} = e^{\log n \cdot \log\left(\frac{\log n}{n}\right)}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ per gerarchia di infiniti,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\log(+\infty)\cdot \log 0} = e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

8. La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

► (a) diverge positivamente

(b) diverge negativamente

(c) converge assolutamente

(d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{1}{n} - \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e utilizziamo lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = -\frac{1}{n}$ ottenendo

$\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\to+\infty$. Quindi

$$a_n = \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(2 + o(1)\right).$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$, quindi a_n è definitivamente positiva e possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Dato che $\sum_n b_n = +\infty$ otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

9. Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t)$ nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$ è

► (a) $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$

(b) 1

(c) $-3\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{2}$

Soluzione:

Calcoliamo la velocità della curva:

$$\dot\gamma(t) = (3\cos^2 t(-\sin t), 2\sin t \cos t).$$

Per $t = \frac{\pi}{4}$ il vettore velocità è

$$\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(-3\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\frac{\sqrt2}{2}, \cancel{2}\frac{\sqrt2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right) = \left(-3\cdot\frac{\cancel{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{2}}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{-3\sqrt2}{4}, 1\right)$$

La retta tangente sarà quindi parallela alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt2}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

che ha coefficiente angolare $m = \frac{1}{\frac{-3\sqrt2}{4}} = \frac{-4}{3\sqrt2}$.

10. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2y^2(x+3y+1)$

► (a) non è né superiormente né inferiormente limitata

(b) è limitata inferiormente ma non superiormente

(c) è limitata

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = x^2y^2(x+3y+1)$$

Consideriamo la restrizione di f alla retta $\gamma(t) = (t,t)$

$$g(t) = f(t,t) = t^2t^2(t+3t+1) = t^4(4t+1) = 4t^5+t^4$$

Dato che $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$,

la funzione f non è né superiormente né inferiormente limitata.

Corso di Laurea in Informatica	**Analisi Matematica**	**codice 935932** **05 settembre 2024**

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	c
3	c
4	a
5	d
6	b
7	d
8	d
9	d
10	c

1. Il polinomio di Taylor al primo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x}\right)$ è:

(a) $1 + \frac{x}{2}$ ► (b) $\frac{x}{2}$ (c) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ (d) $1 + \sqrt{1+x}$

Soluzione:

$f(x) = \log(\sqrt{1+x})$

utilizziamo prima lo sviluppo di Taylor del binomiale

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \qquad x \to 0.$$

e quello del logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad \text{con} \quad t = \frac{x}{2} + o(x)$$

osservando che se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$.

$$\log(\sqrt{1+x}) = \log\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x) + o\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x)$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor risulta che il polinomio

al primo ordine è $P(x) = \frac{x}{2}$.

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$

(a) ha sia massimo che minimo

(b) ha minimo ma non ha massimo

► (c) ha massimo ma non ha minimo

(d) non è limitata né superiormente né inferiormente

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\sin x\,(1-e^{1/x})$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\cdot\left(1-e^{\frac{1}{0^+}}\right) = 0\cdot(1-e^{+\infty}) = 0\cdot(-\infty) \text{ indeterminata}$$

Eseguiamo la sostituzione $\frac{1}{x}=t$, quindi se $x\to 0^+ \Rightarrow t\to+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \sin\frac{1}{t}\,(1-e^{t}) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(1-e^{t}) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1-e^{t}}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = -\infty \quad \text{per gerarchia di infiniti.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{limitata}\cdot\left(1-e^{\frac{1}{+\infty}}\right) = \text{limitata}\,(1-e^{0}) =$$

$$= \text{limitata}\cdot 0 = 0.$$

Dal limite per $x\to 0^+$ otteniamo che f non ha minimo.

Osserviamo ora che $(1-e^{1/x})<0 \ \forall x>0$ e che $\sin x$ cambia periodicamente segno, quindi esiste sicuramente un punto $x_0>0$ t.c. $\sin(x_0)<0$ quindi $f(x_0)>0$.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che f ha massimo.

3. $\displaystyle\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7} =$

(a) $\arctan 6 - \arctan 5$ (b) $\dfrac{13}{40}$ ► (c) $\dfrac{\log 2-\log 5}{6}$ (d) $\log\dfrac{5}{2}$

Soluzione:

$$x^2-8x+7=0 \iff x = 4\pm\sqrt{16-7} = 4\pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+7 = (x-7)(x-1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+7} = \frac{1}{7-1}\log\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + c$$

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7} = \left[\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-7}{x-1}\right|\right]_5^6 = \frac{1}{6}\log\left|\frac{-1}{5}\right| - \frac{1}{6}\log\left|\frac{-2}{4}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(-\log 5 + \log 2\right).$$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}-1}\,dx =$

► (a) $\log\left(\dfrac{e^2+1}{e+1}\right)$ (b) $\log(e^2-e)$ (c) $\log\dfrac{3}{2}$ (d) 0

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$$e^x = t \qquad \frac{dt}{dx} = e^x \qquad e^x dx = dt$$

$$\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{t-1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{dt}{t+1} = \log|t+1| + c$$

$$= \log|e^x+1| + c = \log(e^x+1) + c$$

Quindi, dal teorema di Torricelli:

$$\int_1^2 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}-1}\,dx = \Big[\log(e^x+1)\Big]_1^2 = \log(e^2+1) - \log(e+1) =$$

$$= \log\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$$

5. Sia $f(x) = -\frac{1}{x}$. Allora

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ converge assolutamente

(b) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

(c) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ converge

► (d) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ non converge assolutamente

Soluzione:

Ricordiamo che $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. Quindi

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \left|-\frac{1}{x}\right| dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge assolutamente.

6. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(1+|\log x|)}\,dx$

(a) diverge negativamente ► (b) converge (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(1+|\log x|)}\,dx$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2(1+|\log x|)}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$.

La f non è definita per $x=0$, dividiamo quindi l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$.

Per $x \to 0$
$$f(x) = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{x^2\,(1+|\log x|)} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x^2(1+|\log x|)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+o(x)}{1+|\log x|} \to \frac{\frac{1}{2}+0}{1+\infty} = 0$$

La funzione è quindi limitata in un intorno di $x=0$ pertanto

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Per $x \to +\infty$ $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1+1}{x^2(1+|\log x|)} \leq \dfrac{2}{x^2}$

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ converge, per il criterio del confronto,

anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}} =$

(a) $\dfrac{1}{e}$ (b) $+\infty$ (c) 1 ► (d) 0

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}} = \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\log n} = e^{\log n \cdot \log\left(\frac{\log n}{n}\right)}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ per gerarchia di infiniti,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\log(+\infty)\cdot \log 0} = e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

8. La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(a) converge semplicemente ma non assolutamente

(b) converge assolutamente

(c) diverge negativamente

► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{1}{n} - \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e utilizziamo lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = -\frac{1}{n}$ ottenendo

$\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\to+\infty$. Quindi

$$a_n = \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(2 + o(1)\right).$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$, quindi a_n è definitivamente positiva e possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Dato che $\sum_n b_n = +\infty$ otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

9. Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t)$ nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$ è

(a) 1

(b) $\sqrt{2}$

(c) $-3\sqrt{2}$

► (d) $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$

Soluzione:

Calcoliamo la velocità della curva:

$$\dot\gamma(t) = (3\cos^2 t\,(-\sin t),\ 2\sin t\cos t).$$

Per $t = \frac{\pi}{4}$ il vettore velocità è

$$\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cancel{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-3\cdot\frac{\cancel{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}},\ \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{4},1\right)$$

La retta tangente sarà quindi parallela alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{4} \\ 1 \end{pmatrix},\quad s\in\mathbb{R}$$

che ha coefficiente angolare $m = \dfrac{1}{\frac{-3\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{-4}{3\sqrt{2}}$.

10. La funzione $f(x,y) = e^{1-x}(y^3 - 2xy)$

(a) è inferiormente ma non superiormente limitata

(b) è limitata

► (c) non è né superiormente né inferiormente limitata

(d) è superiormente ma non inferiormente limitata

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{1-x}(y^3 - 2xy)$$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo la restrizione alla curva $\gamma(t) = (1,t)$ (retta $x=1$).

$$g(t) = f(\gamma(t)) = f(1,t) = e^{1-1}(t^3 - 2t) = t^3 - 2t$$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty,\quad \lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$$

quindi f non è né superiormente né inferiormente limitata.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 500709 05 settembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	d
3	a
4	d
5	d
6	d
7	c
8	c
9	d
10	c

1. Il polinomio di Taylor al primo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x}\right)$ è:

► (a) $\frac{x}{2}$ (b) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ (c) $1+\frac{x}{2}$ (d) $1+\sqrt{1+x}$

Soluzione:

$f(x) = \log(\sqrt{1+x})$

utilizziamo prima lo sviluppo di Taylor del binomiale

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \qquad x \to 0.$

e quello del logaritmo

$\log(1+t) = t + o(t) \qquad$ con $\quad t = \frac{x}{2} + o(x)$

osservando che se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0.$

$\log(\sqrt{1+x}) = \log\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x) + o\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x)$

Per l'unicità del polinomio di Taylor risulta che il polinomio al primo ordine è $P(x) = \frac{x}{2}$.

2. La funzione $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}\,(\log(1+x) - \log x)$

(a) ha un asintoto obliquo e due verticali

(b) ha due asintoti verticali e uno orizzontale

(c) ha tre asintoti verticali

► (d) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}\left(\log(1+x) - \log x\right)$$

f è definita per $x>0$ e $x \neq 1$ quindi in $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-1}{-1}\left(\log 1 - \log 0\right) = 1\left(0 - (-\infty)\right) = +\infty$$

quindi c'è l'asintoto verticale di equazione $x=0$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1-1}{1-1}\left(\log(2) - \log 1\right) = \frac{0}{0} \cdot \log 2 = ?$$

$$x^3-1 = (x^2+x+1)(x-1)$$

$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

quindi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}\left(\log(1+x) - \log x\right) = \frac{3}{2} \log 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}(\infty - \infty) = ?$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}\left(\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \frac{x^3-1}{x^2-1} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Ricordiamo che $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$

e sostituiamo $t = \frac{1}{x}$ dato che $x \to \infty \Rightarrow t = \frac{1}{x} \to 0$

Quindi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^2-1}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{(x^2-1) \cdot x}\left(1 + o(1)\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^3-x}\left(1+o(1)\right) = 1\,(1+0) = 1.$$

Quindi f ha un asintoto orizzontale di equazione $y=1$ per $x \to \infty$.

3. $\displaystyle\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7} =$

► (a) $\dfrac{\log 2 - \log 5}{6}$ (b) $\arctan 6 - \arctan 5$ (c) $\log \dfrac{5}{2}$ (d) $\dfrac{13}{40}$

Soluzione:

$$x^2-8x+7=0 \iff x=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm 3= \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-8x+7=(x-7)(x-1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+7}=\frac{1}{7-1}\log\left|\frac{x-7}{x-1}\right|+c$$

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7}=\left[\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-7}{x-1}\right|\right]_5^6=\frac{1}{6}\log\left|\frac{-1}{5}\right|-\frac{1}{6}\log\left|\frac{-2}{4}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\log\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\log\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(-\log 5+\log 2\right).$$

4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\cos x)^2\,\tan x\,dx=$

(a) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{4}$ ▶ (d) $\frac{1}{8}$

Soluzione:

Osserviamo che $\cos^2 x\, tg x=\cos^2 x\,\frac{\sin x}{\cos x}=\cos x\sin x \quad (\cos x\neq 0)$.

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$\sin x=t\;,\;\frac{dt}{dx}=\cos x\;,\;\cos x\,dx=dt$

$$\int\cos^2 x\, tg x\,dx=\int\cos x\sin x\,dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\sin^2 x}{2}+c$$

Quindi, dal teorema di Torricelli:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^2 x\, tg x\,dx=\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2-\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{8}.$$

5. Sia $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Allora

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ converge assolutamente

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ converge

► (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ non converge assolutamente

Soluzione:

Ricordiamo che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. Quindi

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \left|-\frac{1}{x}\right| dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

quindi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge assolutamente.

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(e^{(x^2)} - (e^x)^2\right)\cos x}{1-\cos x}\,dx$

(a) converge

(b) non esiste

(c) diverge positivamente

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(e^{x^2} - (e^x)^2\right)\cos x}{1-\cos x}\,dx$$

$f(x) = \dfrac{\left(e^{x^2} - (e^x)^2\right)\cos x}{1-\cos x}$ è definita e continua $\forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

osserviamo che $\cos x = 1 + o(1)$ per $x \to 0$, quindi non influenza la convergenza. Quindi per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{\left(\left(1+x^2+o(x^2)\right) - \left(1+x+o(x)\right)^2\right)\left(1+o(1)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} =$$

$$= \frac{\left(\cancel{1}+x^2+o(x^2) - \left(\cancel{1}+2x+o(x)\right)\right)\left(1+o(1)\right)}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \frac{\left(-2x+o(x)\right)\left(1+o(1)\right)}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$$

$$= \frac{\left(-2+o(1)\right)\left(1+o(1)\right)}{x\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)} = \frac{1}{x}\,\frac{\left(-2+o(1)\right)\left(1+o(1)\right)}{\frac{1}{2}+o(x)}$$

Da questo risultato otteniamo che $f < 0$ in un intorno di 0

Scegliamo quindi $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x}\,\frac{(-2+o(1))(1+o(1))}{\frac{1}{2}+o(x)} \cdot x = 4$$

Dato che $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, segue che $\int_0^1 -f(x)\,dx = +\infty$

quindi $\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty$.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}} =$

(a) $+\infty$ (b) 1 ► (c) 0 (d) $\frac{1}{e}$

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}} = \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\log n} = e^{\log n \cdot \log\left(\frac{\log n}{n}\right)}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ per gerarchia di infiniti,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\log(+\infty)\cdot\log 0} = e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

8. La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(a) converge assolutamente

(b) diverge negativamente

► (c) diverge positivamente

(d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{1}{n} - \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e utilizziamo lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = -\frac{1}{n}$ ottenendo

$\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to +\infty$. Quindi

$$a_n = \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(2 + o(1)\right).$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$, quindi a_n è definitivamente positiva e possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Dato che $\sum_n b_n = +\infty$ otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

9. Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t)$ nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$ è

(a) $-3\sqrt{2}$

(b) 1

(c) $\sqrt{2}$

► (d) $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$

Soluzione:

Calcoliamo la velocità della curva:

$$\dot\gamma(t) = (3\cos^2 t(-\sin t),\ 2\sin t\cos t).$$

Per $t = \frac{\pi}{4}$ il vettore velocità è

$$\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(-3\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\frac{\sqrt2}{2},\ \cancel{2}\,\frac{\sqrt2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right) = \left(-3\cdot\frac{\cancel{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{2}},\ \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{-3\sqrt2}{4},\ 1\right)$$

La retta tangente sarà quindi parallela alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt2}{4} \\ 1 \end{pmatrix},\quad s\in\mathbb{R}$$

che ha coefficiente angolare $m = \dfrac{1}{\frac{-3\sqrt2}{4}} = \dfrac{-4}{3\sqrt2}$.

10. La funzione $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2y^2(x+3y+1)$

(a) è limitata inferiormente ma non superiormente

(b) è limitata

► (c) non è né superiormente né inferiormente limitata

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = x^2y^2(x+3y+1)$$

Consideriamo la restrizione di f alla retta $\gamma(t) = (t,t)$

$$g(t) = f(t,t) = t^2t^2(t+3t+1) = t^4(4t+1) = 4t^5 + t^4$$

Dato che $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$,

la funzione f non è né superiormente né inferiormente limitata.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 269749 05 settembre 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	a
3	b
4	b
5	d
6	c
7	d
8	b
9	d
10	d

1. Il polinomio di Taylor al primo ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x}\right)$ è:

► (a) $\frac{x}{2}$ (b) $1+\sqrt{1+x}$ (c) $1+\frac{x}{2}$ (d) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

Soluzione:

$f(x) = \log(\sqrt{1+x})$

utilizziamo prima lo sviluppo di Taylor del binomiale

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \qquad x \to 0.$

e quello del logaritmo

$\log(1+t) = t + o(t) \qquad$ con $\quad t = \frac{x}{2} + o(x)$

osservando che se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0.$

$\log(\sqrt{1+x}) = \log\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x) + o\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x)$

Per l'unicità del polinomio di Taylor risulta che il polinomio

al primo ordine è $P(x) = \frac{x}{2}$.

2. L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - \dfrac{1}{x} < 0\right\}$

► (a) è limitato

(b) è limitato superiormente ma non inferiormente

(c) è limitato inferiormente ma non superiormente

(d) non è limitato né inferiormente né superiormente

Soluzione:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \; x^2 - \frac{1}{x} < 0 \right\}$$

Sia $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{-\infty} = +\infty - 0 = +\infty$

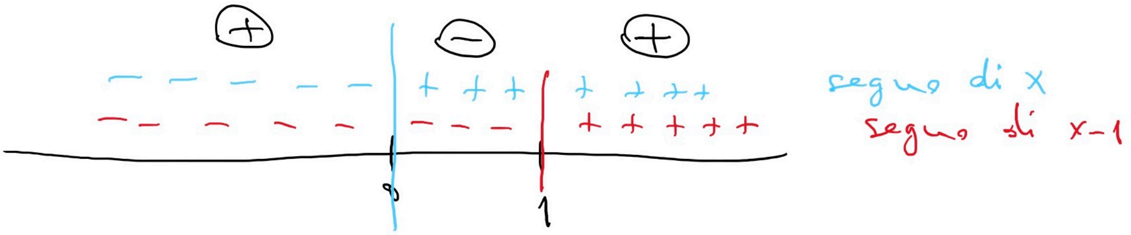
Quindi la disuguaglianza $f(x) < 0$ è falsa sia in un intorno di $+\infty$ che di $-\infty$. Ne segue che

A è limitato.

Soluzione senza uso dei limiti.

$$x^2 - \frac{1}{x} < 0 \iff \frac{x^3-1}{x} < 0 \iff \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} < 0$$

$$x^2+x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta = 1-4 < 0)$$



Ne segue che $x^2 - \frac{1}{x} < 0 \iff 0 < x < 1$.

L'insieme dato è quindi limitato.

3. $\displaystyle\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7} =$

(a) $\log\frac{5}{2}$ ► (b) $\frac{\log 2 - \log 5}{6}$ (c) $\frac{13}{40}$ (d) $\arctan 6 - \arctan 5$

Soluzione:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \iff x = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 7 = (x-7)(x-1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+7} = \frac{1}{7-1}\log\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + c$$

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2-8x+7} = \left[\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-7}{x-1}\right|\right]_5^6 = \frac{1}{6}\log\left|\frac{-1}{5}\right| - \frac{1}{6}\log\left|\frac{-2}{4}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}(-\log 5 + \log 2).$$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\,dx =$

(a) $e^3 - \frac{1}{e}$ ► (b) $e^3 + e - 2$ (c) 0 (d) $e^3 - e$

Soluzione:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

quindi

$$\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\,dx = \int_{-2}^{-1} e^{-x-1}\,dx + \int_{-1}^{2} e^{x+1}\,dx = \left[-e^{-x-1}\right]_{-2}^{-1} + \left[e^{x+1}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= -\left(e^{1-1} - e^{2-1}\right) + \left(e^{2+1} - e^{-1+1}\right) = -(1-e) + e^3 - 1 =$$

$$= e^3 + e - 2$$

5. Sia $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Allora

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ converge assolutamente

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ converge

► (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ non converge assolutamente

Soluzione:

Ricordiamo che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. Quindi

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \left|-\frac{1}{x}\right| dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

quindi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge assolutamente.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$

(a) diverge negativamente (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

$\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$. Poniamo $f(x)=\frac{\log x}{1-x^2}$ e osserviamo che

f non è definita per $x=0$ e $x=1$. Dividiamo l'intervallo di integrazione considerando prima $\int_0^{1/2} f(x)dx$. Osserviamo che $f(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$.

Vediamo l'andamento di f per $x\to 0$. Scegliamo $g(x)=\frac{1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1-x^2}\cdot x^{1/2}=1\cdot\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\log x=0.$$

Dato che $\int_0^{1/2} g(x)dx$ converge, per il criterio del confronto, anche $\int_0^{1/2} f(x)dx$ converge.

Per $x\to 1$ $f(x)=\frac{\log(1+x-1)}{x^2-1}=\frac{(x-1)+o(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1+o(x-1)}{x+1}\to\frac{1}{2}$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$, di conseguenza $\int_{1/2}^1 f(x)dx$ converge.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}}=$

(a) $\frac{1}{e}$ (b) 1 (c) $+\infty$ ► (d) 0

Soluzione:

$$a_n=\frac{(\log n)^{\log n}}{n^{\log n}}=\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\log n}=e^{\log n\cdot\log\left(\frac{\log n}{n}\right)}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ per gerarchia di infiniti,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=e^{\log(+\infty)\cdot\log 0}=e^{(+\infty)\cdot(-\infty)}=e^{-\infty}=0.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(a) converge assolutamente

► (b) diverge positivamente

(c) converge semplicemente ma non assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ e utilizziamo lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$ con $t = -\frac{1}{n}$ ottenendo

$\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to +\infty$. Quindi

$$a_n = \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(2 + o(1)\right).$$

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$, quindi a_n è definitivamente positiva e possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Dato che $\sum_n b_n = +\infty$ otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

9. Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t)$ nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$ è

(a) 1

(b) $\sqrt{2}$

(c) $-3\sqrt{2}$

► (d) $\dfrac{-4}{3\sqrt{2}}$

Soluzione:

Calcoliamo la velocità della curva:

$$\dot\gamma(t) = (3\cos^2 t(-\sin t), 2\sin t\cos t).$$

Per $t = \frac{\pi}{4}$ il vettore velocità è

$$\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}, \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-3\cdot\frac{\cancel{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{4}, 1\right)$$

La retta tangente sarà quindi parallela alla retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

che ha coefficiente angolare $m = \dfrac{1}{\frac{-3\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{-4}{3\sqrt{2}}$.

10. La funzione $f(x,y) = e^{1-x}(y^3 - 2xy)$

(a) è inferiormente ma non superiormente limitata

(b) è limitata

(c) è superiormente ma non inferiormente limitata

▶ (d) non è né superiormente né inferiormente limitata

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{1-x}(y^3 - 2xy)$$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo la restrizione alla curva $\gamma(t) = (1, t)$ (retta $x = 1$).

$$g(t) = f(\gamma(t)) = f(1,t) = e^{1-1}(t^3 - 2t) = t^3 - 2t$$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$$

quindi f non è né superiormente né inferiormente limitata.